Doğal sihirli kareler
I.Makale

Asker Ali Abiyev

Gaziantep Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Gaziantep

Sihirli kareler 2000 yıldır aydınların kafasını meşgul etmiştir. Son 250 yılda matematikçiler sihirli karenin ciddi bir matematiksel problem olduğunu ortaya koymuşlardır. Ünlü metametikçilerin uğraşmasına rağmen bu problem 1996'ya kadar çözülememiştir. Ben 1996 yılında sihirli karelerin doğal algoritmasını buldum. Bu algoritma sonsuza kadar istenen dereceden sihirli kare yazmak olanağını sağlamış bulunuyor.

Ben bu keşfimi ilk defa 1. Kızılırmak Fen Bilimleri Kongresi'nde (14-16 Mayıs, 1997, Kırıkkale) sundum. Daha sonra ise İspanya'nın San Feliu de Guixols şehrinde (Research Conference on "Number Theory and Arithmetical Geometry." Spain, 24-29 October, 1997) sayılar teorisi üzerine konferansda sundum.

Sihirli Kare Nedir?

Her hangi bir kareyi eşit aralıklarla n-1 sayıda yatay ve düşey doğrular yardımıyla n^2 sayıda karelere bölelim. Böyle kareye n. dereceden kare diyeceğiz.

n. dereceden sihirli karenin tanımı:

$\{1,2,3,...,n^2-1, n^2\}$ sayılar kümesinin elemanlarını nxn kareye öyle yazalım ki, istenen sütun, satır veya köşegenlerdeki n tane sayının toplamı aynı sabit S sayısına eşit olsun. Bu sayıya sihirli sayı diyeceğiz. Bu sayının formülünü bulalım.

Sihirli karenin tanımına göre tüm hanelerdeki sayıların toplamı nS'e, diğer yandan ise $1+2+3+...+(n^2-1)+n^2$' a eşit olacak, yani $nS=1+2+3+...+(n^2-1)+n^2=\frac{n^2+1}{2}n^2$ 'ye eşittir.

$S=\frac{n^2+1}{2}n$ bulunur.

Kareler derecesine göre çiftli ve tekli kareler olarak isimlendiriliyor. Çift dereceden kareler ise 2 türlüdür: derecesi ikiye bölündüğünde çift sayı oluşturan kare, çiftli-çift kare ve derecesi ikiye bölündüğnüde tek sayı oluşturan kare ise tekli-çift kare olarak isimlendireceğiz.

4,8,12,16,20, ... çiftli-çift sayılar
2,6,10,14,18,... tekli-çift sayılar
3,5,7,9,... ise tek sayılardır.

Bugün sihirli kare problemi, sonsuzadek istenilen n. derece için sihirli kare oluşturmaktan ibarettir. Şimdiyedek yazılan sihirli karelerin kuralları farklı olduklarından basit kuralla yazılmış kare mükemmel kare olarak isimlendirilir. Benim bulduğum kural ise bilinen en basiti olduğundan, bu algoritma ile oluşturulmuş sihirli kareye doğal sihirli kare adını verdim.

Bu algoritmayı açıklamak için 3 soruyu yanıtlamak gerekir. "Ne", "Nereye", "Nasıl" yazılmalıdır?

Doğal sihirli kare oluşturmak için $\{1,2,3,...,n^2\}$ kümesinin sayıları $\frac{n}{2}$ gruba ayrılır (burada n çift sayıdır). Her grup ise 4 çeşit aritmetik dizi içerir. Her dizinin son terimi bir sonraki dizinin ilk terimi olur. Her 4. dizinin son terimi 1. dizinin 1. terimiyle aynıdır. Bu ifade tüm grupların dizileri için geçerlidir. n. dereceden kare için 1. grubun 4. dizisini oluşturalım:

α_1 – 1,2,3,...,n–1,n (1'er artar)

β_1 – n,2n,3n,...,(n–1)n,n^2 (n'er artar)

γ_1 – n^2,(n^2–1),(n^2–2), ..., [n^2–(n–1)] (1'er azalır)

δ_1 – [n^2–(n–1)], [n^2–(n–1)–n], ..., [n^2–(n–1)–n(n–1)] (n'er azalır)

δ_1 dizisinin son terimi 1'e, ondan bir öncesi ise (n+1)'e eşittir.

Her sonraki grubun 1. dizisinin 1. terimi bir önceki grubun 4. dizisinin sondan bir önceki teriminin 1 fazlasına eşittir. Her grubun 1., 2., 3. ve 4. dizileri sırasıyla +1, +n, –1, –n olarak artar ve azalır.

Örnek olarak n=12 için grupları ve dizileri yazalım:

α_1 – 1,2,3, ..., 11, 12 (1'er artar)
β_1 – 12,24,36, ..., 132,144 (12'er artar)
γ_1 – 144,143,142, ... , 134,133 (1'er azalır)
δ_1 – 133,121, ... , 13,1 (12'er azalır)

α_2 – 14,15, ..., 22,23 (1'er artar)
β_2 – 23,35, ..., 119,131 (12'er artar)
γ_2 – 131,130, ..., 123,122 (1'er azalır)
δ_2 –122,110, ... , 26,14 (12'er azalır)

α_3 – 27,28, ..., 33,34 (1'er artar)
β_3 – 34,46, ... , 106,118 (12'er artar)
γ_3 – 118,117, ... , 112,111 (1'er azalır)
δ_3 –111,99, ... , 39,27 (12'er azalır)

α_4 – 40,41,42,43,44,45 (1'er artar)
β_4 – 45,57,69,81,93,105 (12'er artar)
γ_4 – 105,104,103,102,101,100 (1'er azalır)
δ_4 – 100,88,76,64,52,40 (12'er azalır)

α_5 – 53,54,55,56 (1'er artar)
β_5 – 56,68,80,92 (12'er artar)
γ_5 – 92,91,90,89 (1'er azalır)
δ_5 – 89,77,65,53 (12'er azalır)

α_6 – 66,67 (1'er artar)
β_6 – 67,79 (12'er artar)
γ_6 – 79,78 (1'er azalır)
δ_6 –78,66 (12'er azalır)

Böylelikle, "Ne?" sorumuzun yanıtı olarak grupları ve dizileri nasıl elde edeceğimizi gösterdik. Böyle gruplar ve diziler istenen çiftli-çift, tekli-çift ve tek dereceden karelerin hepsi için geçerlidir.

Şimdi ise, "Nereye?" sorusunu yanıtlayalım. "Nereye?" sorusunu yanıtlamak için ele aldığımız kareyi çerçevelere ayıralım: çerçeveden kasdımız dıştan içe varolan iç-içe (konsentrik) kare çerçeveleridir.

Şekil 1'de n. dereceden karenin çerçevelerinin sıralanması ve derecelenmesi gösterilmiştir. Aynı çerçevelerin köşgenlerindeki haneleri aynı sembollerle işaret olunmuştur. Kuşkusuz ki, çerçevelerin sayısı ve ele aldığımız grupların sayısı birbirlerine eşittirler,

yani; çerçeveler sayısı = gruplar sayısı $= \frac{n}{2}$

Örneğin, 12x12'lik bir karenin 6 çerçevesi ve 6 grubu vardır.

Tek dereceden kare için çerçeve ve gruplar sayısı $\frac{n-1}{2}$'ye eşittir. Bu nedenle son dizi bir sayıdan ve çerçeve ise bir haneden ibarettir.

Her gruptaki dizilerin elemanları sayısı uygun çerçevdeki haneler sayısına eşittir.

Görüldüğü gibi çerçeveler ve gruplar sayılarının eşitliği bizi şu noktaya götürür:

1. çerçeve hanelerine 1. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak;
2. çerçeve hanelerine 2. grubun 4 dizisindeki sayılar yazılacak, vb.

Her grubun dizi elemanları çerçevenin hanelerine nasıl yazılmalıdır?

Çerçevenin hanelerine sayıları yazmak için yönlü parçalardan oluşan graflardan faydalanmamız gerekiyor. Her çerçeveye grubun sayılarını tamamen yazdığımızda graf kapanır. Böyle grafa kapalı graf veya Euler devri denir. Bu devri E ile işaret edelim.

Çeşitli dereceden çerçevelerin Euler devirlerindeki farkı anlamak için karenin merkezine yakın iki satır ve sütünların oluşdurdukları "artı" işaretine dikkat edelim.

Örnek olarak 12. dereceden kare için Euler devirlerini gösterelim (Şekil 2).

Şekillerden görüldüğü gibi her grubun aynı dizisi aynı renkle ifade olunmuştur.

1. veya α dizisi turuncu
2. veya β dizisi kırmızı
3. veya γ dizisi mavi
4. veya δ dizisi mor olarak verilmiştir.

Şekilden görüldüğü gibi Euler devirlerindeki fark sadece "artı" işareti içersindedir.

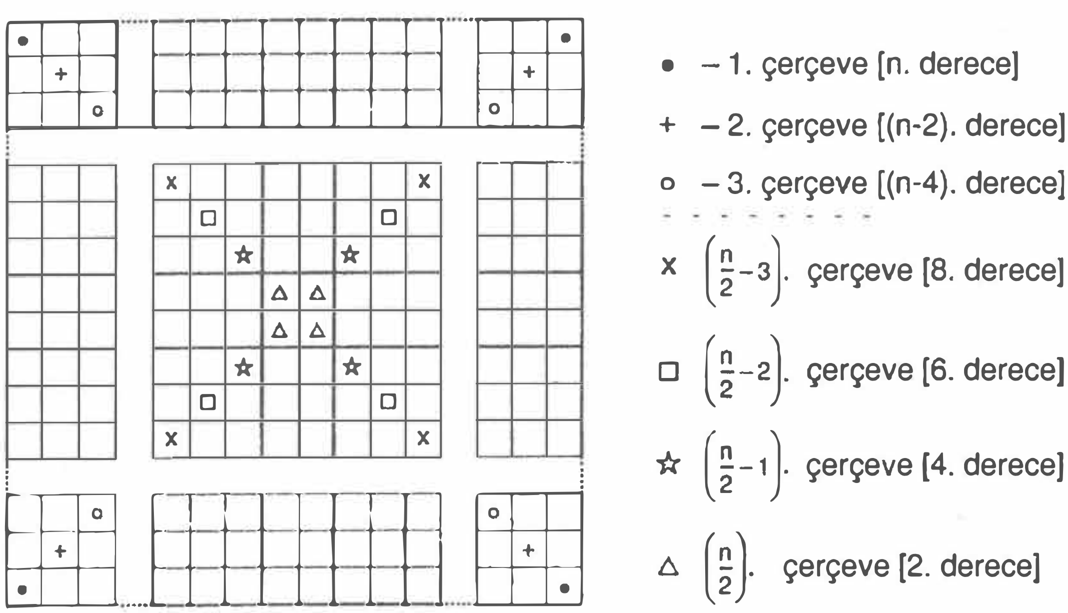
12. dereceden doğal sihrili kare için sunduğumuz bu graflar, dizilerdeki sayıların çerçevelerdeki hanelere nasıl yazılacağını göstermektedir. Bunun için graflardaki yönlere ve renklere dikkat etmek gerekir.

Şekilden görüldüğü gibi 10. ve 6. dereceden çerçevelerin Euler devirleri aynıdır. Fakat, 12. ve 8. dereceden çerçevelerin Euler devirleri farklıdır.

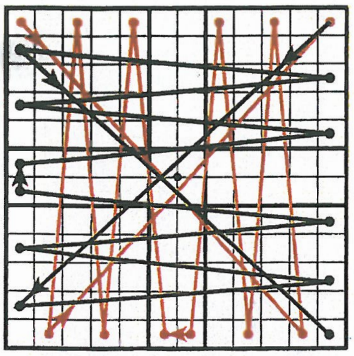
Genelde, tüm çiftli-çift sihirli karelerin içerdiği çiftli-çift çerçevelerin, 8x8 hariç, hepsi aynı E_1 Euler devrine sahiptirler.

Yine de tüm çiftli-çift sihirli karelerin içerdiği tüm tekli-çift çerçevelerin hepsi aynı E_2 Euler devirine sahiptir.

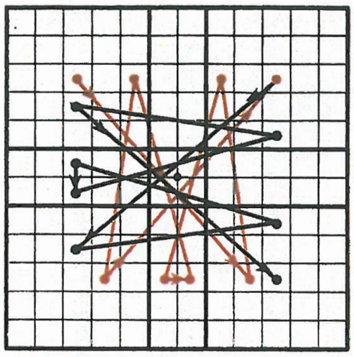
Not: Tekli - çift dereceden doğal sihirli karelerin çerçevelerenin Euler devirleri, çiftli-çift doğal sihirli karelerin çerçevlerine uygun Euler devirlerinden farklıdırlar. O yüzden bu konuyu bir başka makalede açıklayacağız.



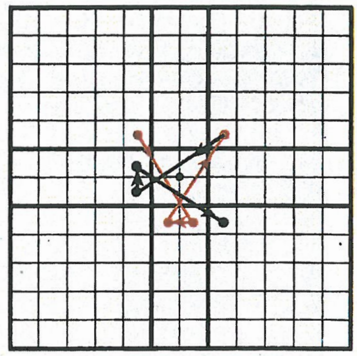
Şekil 1: Karenin çerçevelerinin sıralanması veya derecelenmesi.



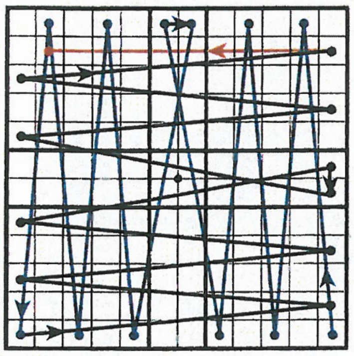
Şekil 2: α_1 ve β_1 grafları



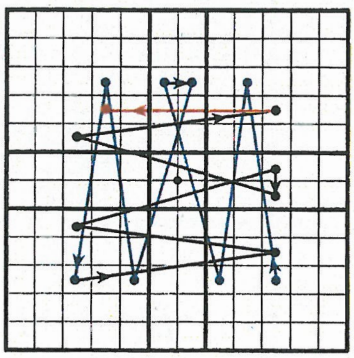
Şekil 2: α_3 ve β_3 grafları



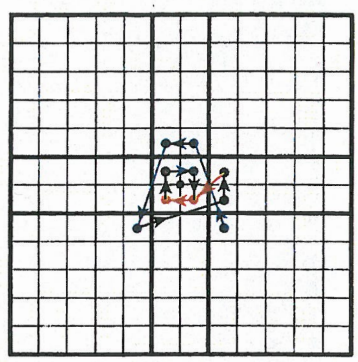
Şekil 2: α_5 ve β_5 grafları



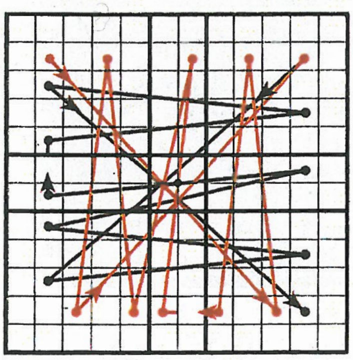
Şekil 2: γ_1 ve δ_1 grafları



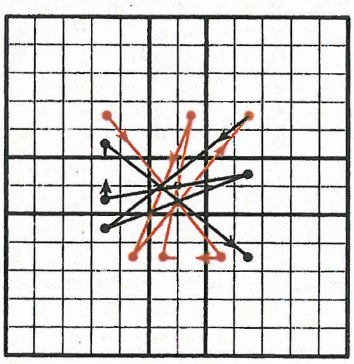
Şekil 2: γ_3 ve δ_3 grafları



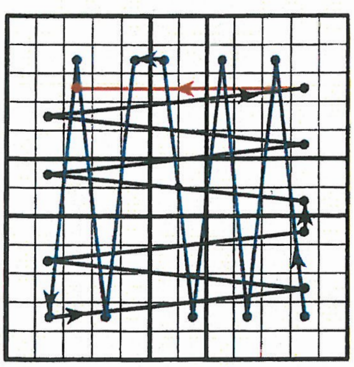
Şekil 2: γ_5 ve δ_5 grafları;
α_6 ve β_6 grafları;
γ_6 ve δ_6 grafları.



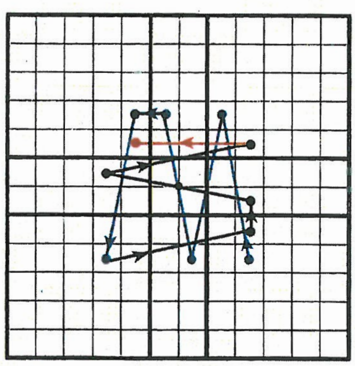
Şekil 2: α_2 ve β_2 grafları



Şekil 2: α_4 ve β_4 grafları

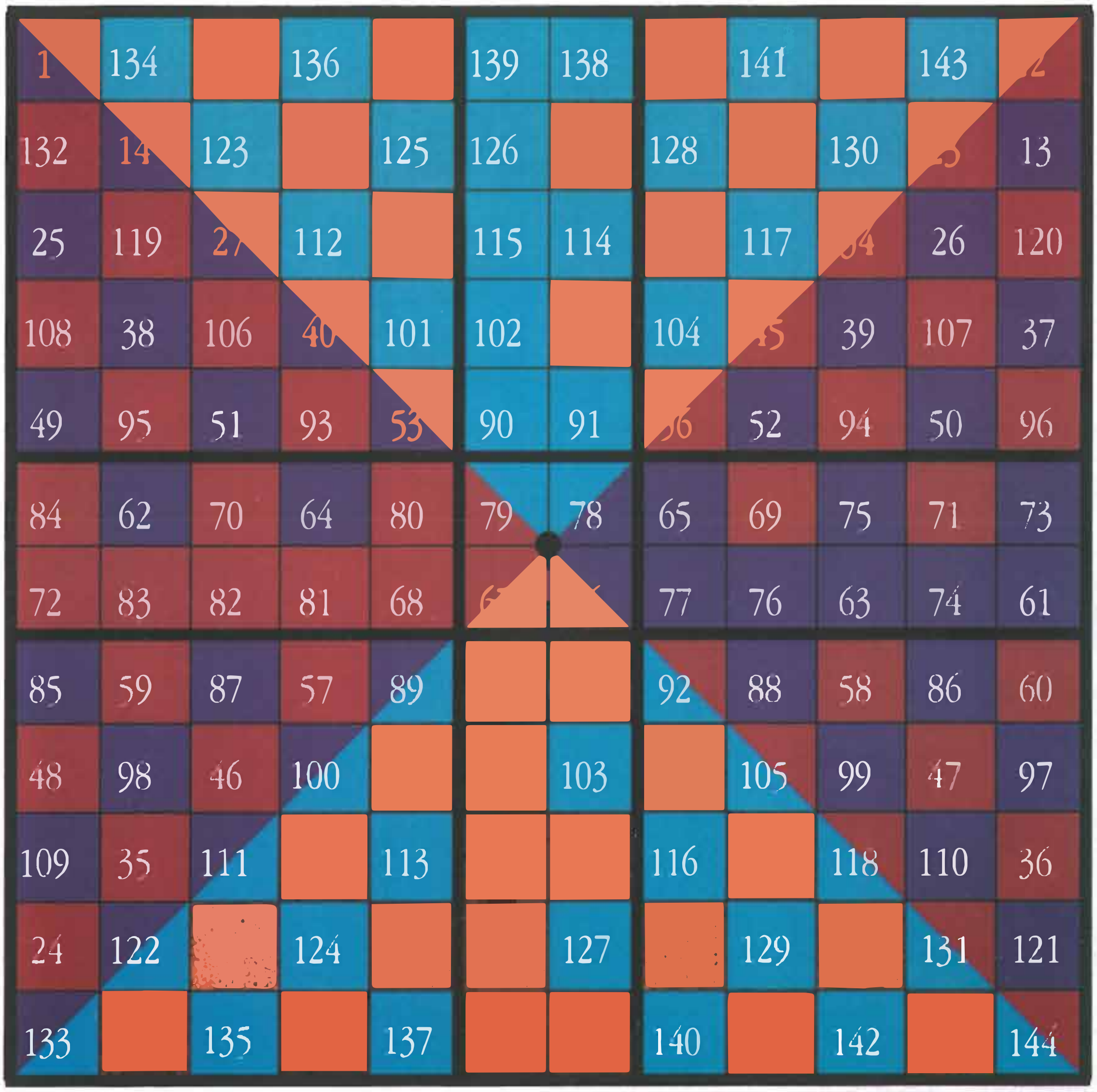


Şekil 2: γ_2 ve δ_2 grafları



Şekil 2: γ_4 ve δ_4 grafları

Şekil 2: 12. dereceden Doğal Sihirli Karenin grafları



Şekil 3 : 12. dereceden Doğal Sihirli Kare

KAYNAKLAR

1. Doğanaksoy A. Sihirli Kareler, Matematik Dünyası, Nisan 1991, sayı 2.
2. Karpenko V. Two thousand years of numerical magic squares, Endeavour, 18, No 4, 1994.
3. Bona M. There are a lot of magic squares. Studies in Applied Mathematics 94, No 4, 1995.
4. Abiyev AA. The Natural Code of Numbered Magic square, Ankara,Enderun Matbaası (ISBN 975-95318-3-6), 1996
5. Tamori`s Algorithm. Bulunduğu İnternet adresi: http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/magicsquare.alg.Tamori.html
6. Shin KY, The perfect solutions of magic squares. Bulunduğu İnternet adresi: http://www.choillian.net/~branstm/magicsquare.htm
7. Deniz G. Kaplumbağa`nın sırtındaki sır, sihirli kareler, Bilim ve Teknik, 1998, Mayıs, Sayı 366.