

4. Dereceden sihirli kübün özellikleri

Asker Ali Abiyev¹, Ahmet Arslan², Azer Abiyev³, Hüseyin Filiz⁴, Akif Muharremov⁵

Gaziantep Üniversitesi, ¹Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, ²Tıp Fakültesi Tıbbi Biyoloji ve Genetik Anabilim Dalı, ⁴Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü, Gaziantep ³İnşaat Mühendisliği Üniversitesi, Bakü, Azerbaycan. ⁵Azerbaycan Bilimler Akademisi, Biyoloji Merkezi, Bakü, Azerbaycan

ÖZET

Bu makalede, sihirli kareler yazmak için, tarafımızca bulunan genel algoritmadan faydalanılarak tam sayılar kümesinde 4. dereceden sihirli küp yazılmış ve onun özellikleri incelenmiştir. Bu özelliklerin, istenilen (rasyonel, irrasyonel vb) sayılar kümesinde yazılmış küp için de geçerli olduğu görülmüştür. Sihirli küpteki bu özellikler, sayılar arasında önemli bağlantıların mevcut olduğunu açığa çıkarmıştır. Bize göre, sihirli küplerin (aynı zamanda karelerin) kütle merkezlerinin geometrik merkezleriyle çakışması, onların temel özelliği olarak kabul edilebilir.

Anahtar Kelimeler: Sihirli küp, grafik, algoritma, doğal sayılar, satır, sıra, sütun

SUMMARY

The properties of the the magic cube of fourth order

In this article we present the solution of the magic cube of fourth order made up of natural numbers using the general algorithm introduced by us, and the properties of this cube were analyzed. We noticed that the properties of magic cubes are valid for any numbers (rational, irrational, etc). These properties of the magic cube that made up magic square slices have shown that there is a strong relationship among the numbers that were assigned to the squares in the cube. Because of this relationship in magic cubes and magic squares the mass and the geometrical centers are overlaps each other. These are the important findings of the general algorithm that we found.

Key Words: Magic cube, graph, algorithm, natural number, row, file, column

1. Sihir küpün tanımı, onun temel özelliğini göstermektedir. Bu makalede bizim amacımız, sihirli küpte varolan diğer özellikleri incelemekten ibarettir. Çünkü bu özelliklerin açığa çıkarılması sihirli küpün, başka bilim dallarına uyarlanmasına yardımcı olacaktır. Bundan dolayı, 4. dereceden doğal sihirli karenin algoritmasına (Abiyev, 1996) uygun algoritma ile yazılmış 4. dereceden doğal sihirli küp ele alınmıştır.

2. Küpte mevcut özellikleri kolay anlamak için bazı açıklamalar yapalım. Küpün geometrik merkezini, Oxyz koordinat sisteminin orijini olarak kabul edelim ve sistemin eksenlerini yüzlere dik yöneltelim. Bu küpte xy, yz ve xz düzlemlerine paralel kesitleri kat olarak isimlendirelim. Oz, Oy ve Ox eksenlerine dik katları sırasıyla, z, y ve x katları olarak kabul edelim. Bu katların numaralarını küpün A(-2, -2, -2) köşesinden geçen yüzlerinden sıralıyalım (Şekil 1). Eksenlere uygun katların numarasını böyle kabul edelim: $x_{(1)}$, $y_{(4)}$, $z_{(3)}$ vb., yani

$x_{(1)}$ – Ox eksenine dik 1. kat

$y_{(4)}$ – Oy eksenine dik 4. kat

$z_{(3)}$ – Oz eksenine dik 3. kat vb. olarak düşünülmektedir.

Küpün A noktasından ve Oz (veya Ox, veya Oy) ekseninden geçen düzlemin küpte oluşturduğu büyük kesiti Q_{1z} (veya Q_{1x} , veya Q_{1y}), buna uygun dik kesiti ise Q_{2z} (veya Q_{2x} , veya Q_{2y}) ile gösterelim (Şekil 8).

Merkezleri Ox, Oy ve Oz eksenlerine paralel doğrular üzerinde olan ard-arda gelen 4'erli küçük küpler, sırasıyla, sıralar, satırlar ve sütunlar olarak adlandırılmıştır.

– $z_{(i)}$ katlarında satırlar, $x_{(1)}$ katından Ox yönünde ve sıralar ise $y_{(1)}$ katından Oy yönünde numaralandırılmıştır (Şekil 2). Örnek: Şekil 2'de $z_{(i)}$ katında 3. satır ve 2. sıra taranmıştır.

– $x_{(i)}$ katlarında satırlar $z_{(1)}$ katından Oz yönünde ve sütunlar ise $y_{(1)}$ katından Oy numaralandırılmıştır (Şekil 3). Örnek: Şekil 3'de $x_{(i)}$ katında 3. satır ve 2. sütun taranmıştır.

– $y_{(i)}$ katlarında sıralar $z_{(1)}$ katından Oz yönünde ve sütunlar $x_{(1)}$ katından Ox yönünde numaralandırılmıştır (Şekil 4). Örnek: Şekil 4'de $y_{(i)}$ katında 3. sıra ve 2. sütun taranmıştır.

2.1. Ele aldığımız 4. dereceden doğal sihirli küpün sayıları uygun katlar ve büyük kesitler için şekil 5, 6, 7 ve 8'de gösterilmiştir. Bu küpün özelliklerinin anlatılmasında kolaylık sağlamak için 9. şekilde birbirlerine simetrik belirli graflar çizilmiştir.

Bu graflar metinde bazen aşağıdaki şekilde gösterilecektir.



9. şekilde gösterilen graflar karelerin 1. ve 4. satırlarına (sütunlarına) uygulandığı gibi 2. ve 3. satırlarına (sütunlarına) da uygulanabilir:



Özellikler

3.1. Sihirli küpün istenen satır, sütun, sıra ve uzay köşegenleri üzerindeki sayıların toplamı sihirli sayıya eşittir. Bu sayı,

$$S = \frac{(n^3 + 1)n}{2} \quad (1)$$

formülünden bulunur. Burada n - küpün derecesidir. 4. dereceden küp için bu sayı 130'a eşittir.

3.2. 4. dereceden doğal küpte istenen sayının küpün geometrik merkezine göre simetriği olan sayı ile toplamı $4^3 + 1 = 65$ 'e eşittir. Bu özellik 4. dereceden doğal karede de mevcuttur.

3.3. Sihirli küpün

$x_{(1)}, \dots, x_{(4)}$ katlarının xy düzlemine simetrik satırlarında;

$y_{(1)}, \dots, y_{(4)}$ katlarının xy düzlemine simetrik sıralarında;

Q_{1z} ve Q_{2z} büyük kesitlerinin xy düzlemine simetrik "satır"larında

g_1, g_2, g_1' ve g_2' graflarına uygun sayıların toplamı sihirli sayıya eşittir.

Örnekler:

$$61 + 3 + 50 + 16 = S = 130$$

$x_{(4)}$ katın 1. ve 4. satırlarında g_2' grafına uygun sayılar (Şekil 6).

$$37 + 27 + 26 + 40 = S$$

$x_{(2)}$ katın 2. ve 3. satırlarında g_1' grafına uygun sayılar (Şekil 6).

$$2 + 59 + 55 + 14 = S$$

$y_{(3)}$ katın 1. ve 4. satırlarında g_1 grafına uygun sayılar (Şekil 6).

3.4. Sihirli küpün $z_{(1)}, \dots, z_{(4)}$ katlarının:

1. ve 4. veya 2. ve 3. satırlarında;

1. ve 4. veya 2. ve 3. sıralarında

g_1 ve g_1' graflarına uygun sayıların toplamı sihirli sayıya eşittir.

Örnekler:

$$48 + 30 + 19 + 33 = S$$

$z_{(2)}$ katın 1. ve 4. satırlarında g_1 grafına uygun sayılar (Şekil 5).

$$48 + 24 + 25 + 33 = S$$

$z_{(2)}$ katın 1. ve 4. sıralarında g_1' grafına uygun sayılar (Şekil 5).

3.5. Sihirli küpün

$(z_{(1)}, z_{(4)})$ ve $(z_{(2)}, z_{(3)})$ katlarının (1., 4.) ve (2., 3.) satırlarında;

$(z_{(1)}, z_{(4)})$ ve $(z_{(2)}, z_{(3)})$ katlarının (1. 4.) ve (2. ve 3.) sıralarında g_3 grafına uygun sayıların toplamı ve karelerinin toplamı kendi aralarında eşittirler.

Örnekler:

$$51 + 15 + 62 + 2 = 3 + 63 + 14 + 50 = 130$$

$$51^2 + 15^2 + 62^2 + 2^2 = 3^2 + 63^2 + 14^2 + 50^2 = 6674$$

$z_{(1)}$ ve $z_{(4)}$ katlarının 4. ve 1. satırlarında g_3 grafına uygun sayılar (Şekil 5).

$$43 + 26 + 38 + 23 = 27 + 42 + 22 + 39 = 130$$

$$43^2 + 26^2 + 38^2 + 23^2 = 27^2 + 42^2 + 22^2 + 39^2 = 4498$$

$z_{(2)}$ ve $z_{(3)}$ katlarının 2. ve 3. satırlarında g_3 grafına uygun sayılar (Şekil 5).

3.6. Sihirli küpün Q_{1z} (veya Q_{2z}) kesitinin (1., 4.) ve (2., 3.) "sattır" larında birbirlerine simetrik g_2 ve g_2' graflarına uygun sayıların toplamı ve karelerinin toplamı da kendi aralarında eşittir.

Örnekler:

$$49 + 6 + 11 + 64 = 1 + 54 + 59 + 16 = 130$$

$$49^2 + 6^2 + 11^2 + 64^2 = 1^2 + 54^2 + 59^2 + 16^2 = 6654$$

Q_{1z} kesitinin 4. ve 1. "sattır"larında g_2 ve g_2' graflarına uygun sayılar (Şekil 8).

$$36 + 23 + 26 + 45 = 20 + 39 + 42 + 29 = 130$$

$$36^2 + 23^2 + 26^2 + 45^2 = 20^2 + 39^2 + 42^2 + 29^2 = 4526$$

Q_{2z} katının 2. ve 3. "sattır"larında g_2 ve g_2' graflarına uygun sayılar (Şekil 8).

3.7. Sihirli küpün Q_{1x} (veya Q_{2x} veya Q_{1y} veya Q_{2y}) kesitinin

(1., 4.) ve (2.,3.) satırlarında;

(1., 4.) ve (2., 3.) sıralarında

g_1 ve g_1' graflarına uygun sayıların toplamı sabit sayıya eşittir.

Örnekler:

$$13 + 15 + 50 + 52 = S$$

Q_{1y} kesitinin 4. ve 1. satırlarında g_1 grafına uygun sayılar (Şekil 8).

$$1 + 24 + 41 + 64 = S$$

Q_{1y} kesitinin 1. ve 4. sıralarında g_1 grafına uygun sayılar (Şekil 8).

$$18 + 26 + 39 + 47 = S$$

Q_{2x} kesitinin 2. ve 3. sıralarında g_1 grafına uygun sayılar (Şekil 8).

3.8. Sihirli küpün O_x , O_y ve O_z eksenlerine göre simetrik, sırasıyla istenilen sıra, satır ve sütunlardaki 4'er sayıların karelerinin toplamı da kendi aralarında eşittir.

Örnekler:

$$1^2 + 15^2 + 62^2 + 52^2 = 13^2 + 3^2 + 50^2 + 64^2 = 6774$$

$z_{(1)}$ (1. satırda) ve $z_{(4)}$ (4. satırda) katlarındaki sayılar (Şekil 5).

$$34^2 + 43^2 + 23^2 + 30^2 = 35^2 + 42^2 + 22^2 + 31^2 = 4434$$

$z_{(2)}$ (2. sırada) ve $z_{(3)}$ (3. sırada) katlarındaki sayılar (Şekil 5).

3.9. Sihirli küpte:

xz düzlemine simetrik katların sıralarında;

yz düzlemine simetrik katların satırlarında;

xy düzlemine simetrik katların satırlarında veya sıralarında

g_1 veya g_1' graflarına uygun sayıların karelerinin toplamı da kendi aralarında eşittir. (3.2'ye bkz.)

Örnekler:

$$1^2+63^2+62^2+4^2=61^2+3^2+2^2+64^2=7830$$

$x_{(1)}$ ve $x_{(4)}$ katlarının 1. ve 4. satırlarında g_1 grafına uygun sayılar (Şekil 6,9).

$$51^2+11^2+6^2+62^2=3^2+59^2+54^2+11^2=6602$$

$z_{(1)}$ ve $z_{(4)}$ katlarının 2. ve 3. sıralarında g_1 grafına uygun sayılar (Şekil 5,9).

3.10. Sihirli küpte:

yz düzlemine göre simetrik katlarının 1. ve 4. (2. ve 3.) satırlarında;
xz düzlemine göre simetrik katların 1. ve 4. (2. ve 3.) sıralarında

g_2 ve g_2 (veya g_2 ve g_2) graflarına uygun sayıların karelerinin de toplamı kendi aralarında eşittir.

Örnekler:

$$1^2+63^2+14^2+52^2=13^2+51^2+2^2+64^2=6870$$

$x_{(1)}$ ve $x_{(4)}$ katlarının 1. ve 4. satırlarında g_2 ve g_2 graflarına uygun sayılar (Şekil 6, 9).

$$46^2+23^2+43^2+18^2=47^2+22^2+42^2+19^2=4818$$

$y_{(2)}$ ve $y_{(3)}$ katlarının 2. ve 3. sıralarında g_2 ve g_2 graflarına uygun sayılar (Şekil 7, 9).

Açıklama

Küpün uzayında, 10. şekilde gösterilen ∇ (yedi) grafını g_4 olarak işaret edeceğiz. Bu grafın, küpün büyük kesitlerine göre simetrisini ise g_4 grafi olarak göstereceğiz. Bu grafların uçlarının uzantıları büyük kesitin karşılıklı köşelerindeki küçük küplerin merkezinde kesişirler.

3.11. Sihirli küpte xy düzlemine göre simetrik katlarda Q_{1z} veya Q_{2z} kesitlerine simetrik g_4 ve g_4 graflarına uygun sayıların toplamı ve bu sayıların teker - teker karelerinin toplamı kendi aralarında eşittirler.

Örnekler:

$$8 + 13 + 2 = 14 + 4 + 5 = 23$$

$$8^2 + 13^2 + 2^2 = 14^2 + 4^2 + 5^2 = 237$$

$z_{(4)}$ (1. sıra) ve $z_{(1)}$ (4. satır);

$z_{(4)}$ (1. satır) ve $z_{(1)}$ (4. sıra) katlarda g_4 ve g_4 graflarına uygun sayılar (Şekil 5,10).

$$41 + 36 + 47 = 45 + 35 + 44 = 124$$

$$41^2 + 36^2 + 47^2 = 45^2 + 35^2 + 44^2 = 5186$$

$z_{(3)}$ (1. sıra) ve $z_{(4)}$ (4. satır);

$z_{(3)}$ (1. satır) ve $z_{(2)}$ (4. sıra) katlarda g_4 ve g_4 graflarına uygun sayılar (Şekil 5,10).

3.12. Sihirli küpte:

xz düzlemine göre simetrik katlarda Q_{1y} veya Q_{2y} kesitlerine göre simetrik;

yz düzlemine göre simetrik katlarda Q_{1x} veya Q_{2x} kesitlerine göre simetrik

g_4 ve g_4 graflarına uygun sayıların sadece toplamı kendi aralarında eşittirler.

Örnekler:

$$4 + 45 + 8 = 16 + 5 + 36 = 57$$

$$4^2 + 45^2 + 8^2 = 2105$$

$$16^2 + 5^2 + 36^2 = 1577$$

$y_{(4)}$ (1. sütun) ve $y_{(1)}$ (4. sıra);

$y_{(4)}$ (1. sıra) ve $y_{(1)}$ (4. sütun);

g_4 ve g_4 graflarına uygun sayılar (Şekil 7, 10).

$$1 + 48 + 2 = 4 + 14 + 33 = 51$$

$$1^2 + 48^2 + 2^2 = 2309$$

$$4^2 + 14^2 + 33^2 = 1301$$

$x_{(1)}$ (1. sütun) ve $x_{(4)}$ (1. satır);


$x_{(1)}$ (1. satır) ve $x_{(4)}$ (1. sütun);

$x_{(1)}$ (4. satır) ve $x_{(4)}$ (4. sütun);

3.13. Sadece 4. dereceden doğal sihirli küpte, belirli simetrik graflara uygun 4 grup sayılar için ilginç özellikler de vardır.

I. grup sayılar için bu özellikleri gösterelim. Bu özellikler tüm gruplar için aynıdır.

Doğal sihirli küpte Q_{1Z} büyük kesitinin 1. ve 4. satırlarındaki  ve  ;

$z_{(1)}$ ve $z_{(4)}$ katlarının 1. ve 4. satırlarındaki  graflarına uygun 4'erli sayıların toplamı 130'a (sihirli sayıya) ve bu sayıların teker - teker karelerinin toplamı ise kendi aralarında eşittirler:

$$1+54+59+16=49+6+11+64=61+15+2+52=13+63+50+4=130$$

$$1^2+54^2+59^2+16^2=49^2+6^2+11^2+64^2=61^2+15^2+2^2+52^2=13^2+63^2+50^2+4^2=6654$$

Örnek gösterdiğimiz bu sayıların ilk 8 ve sonraki 8 rakamlarının teker-teker küplerinin toplamı da kendi aralarında eşittir.

$$1^3+54^3+59^3+16^3+49^3+6^3+11^3+64^3=61^3+15^3+2^3+52^3+13^3+63^3+50^3+4^3=748280$$

Bu özellik Q_{1Z} kesitinin 2. ve 3. "sətir"larındaki ve $z_{(2)}$ ve $z_{(3)}$ katlarının 2. ve 3. satırlarındaki sırasıyla gösterdiğimiz graflara uygun sayılar için de geçerlidir; bu sayılara II. grup sayılar diyeceğiz.

$$48+27+22+33=32+43+38+17=20+34+47+29=36+18+31+45=130$$

$$48^2+27^2+22^2+33^2=32^2+43^2+38^2+17^2=20^2+34^2+47^2+29^2=36^2+18^2+31^2+45^2=4606$$

$$48^3+27^3+22^3+33^3+32^3+43^3+38^3+17^3=20^3+34^3+47^3+29^3+36^3+18^3+31^3+45^3=348920$$



III. grup sayılar küpün $y_{(2)}$ ve $y_{(3)}$ katlarının 2. ve 3. sıralarındaki  grafına;

$z_{(2)}$ ve $z_{(3)}$ katlarının 1. ve 4. sıralarında  grafına uygun sayılardır.

$$30+39+43+18=47+22+26+35=33+25+24+48=17+41+40+32=130$$

$$30^2+39^2+43^2+18^2=47^2+22^2+26^2+35^2=33^2+25^2+24^2+48^2=17^2+41^2+40^2+32^2=4594$$

$$30^3+39^3+43^3+18^3+47^3+22^3+26^3+35^3=33^3+25^3+24^3+48^3+17^3+41^3+40^3+32^3=346580$$

IV. grup sayılar ise küpün $x_{(1)}$ ve $x_{(4)}$ katlarının 2. ve 3. satırlarındaki, sırasıyla  ve  ;

$x_{(2)}$ ve $x_{(3)}$ katlarının 2. ve 3. satırlarındaki, sırasıyla  ve  graflarına uygun sayılardır.

$$32+34+19+45=20+46+31+33=21+43+26+40=25+39+22+44=130$$

$$32^2+34^2+19^2+45^2=20^2+46^2+31^2+33^2=21^2+43^2+26^2+40^2=25^2+39^2+22^2+44^2=4566$$

$$32^3+34^3+19^3+45^3+20^3+46^3+31^3+33^3=21^3+43^3+26^3+40^3+25^3+39^3+22^3+44^3=341120$$

4. dereceden doğal sihirli küp için bulduğumuz genel algoritma istediğimiz sayılardan sihirli küp yazmağa imkan sağladığından, örnek olarak sunduğumuz tam sayılar grubu (rasyonel, irrasyonel, karmaşık vb.) sayılar için de geçerlidir.

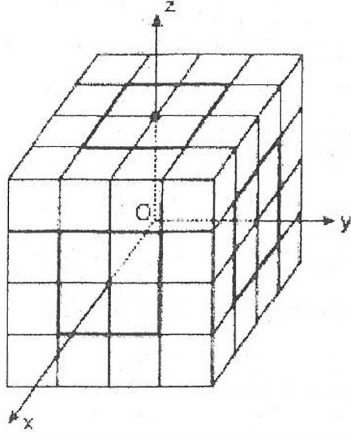
Sihirli küpün önemli özelliklerinden biri de kütle merkezine aittir. Bu küpte sayılar, noktasal kütleler olarak ele alındığında, böyle tanecikler sisteminin kütle merkezi geometrik merkezi ile çakışır (Bu kural sihirli karede de geçerlidir). Doğal sihirli küpün genel algoritması, onun kabuklarının kütle merkezlerini hesaplamak için basit bir formül bulmaya imkan sağlamıştır.

SONUÇ

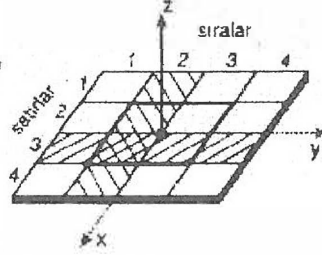
4. dereceden sihirli küp yazmak için, ilk defa tarafımızdan sunulan "genel sihirli kare algoritması"ndan faydalanılmıştır. Doğal sayılar kümesinde yazdığımız sihirli küpte incelediğimiz özellikler, istenen sayılar kümesinde yazılmış sihirli küpler için de geçerli olduğu görülmüştür. Araştırdığımız özellikler, genel algoritmanın mükemmel ve yegane bir algoritma olduğunu söylemeğe imkan sağlar.

KAYNAKLAR

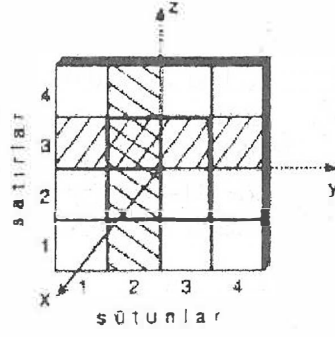
1. Abiyev AA. The Natural Code of Numbered Magic square, Ankara, Enderun Matbaası (ISBN 975-95318-3-6), 1996.
2. Abiyev AA. Doğal sihirli kareler: I. Makale. Gaziantep Tıp Dergisi 2000; 1,2: 66-70.



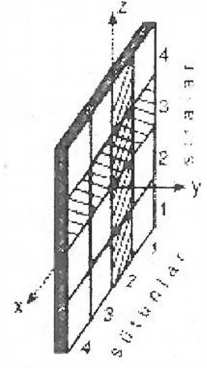
Şekil 1 . Küpün genel görüntüsü.



Şekil 2 . Küpün $z_{(i)}$ katı.
($i = 1,2,3,4$)



Şekil 3 . Küpün $x_{(i)}$ katı.



Şekil 4 . Küpün $y_{(i)}$ katı.

(1)

1	15	62	52
12	6	55	57
56	58	11	5
61	51	2	16

(2)

48	34	19	29
37	43	26	24
25	23	38	44
20	30	47	33

(3)

32	18	35	45
21	27	42	40
41	39	22	28
36	46	31	17

(4)

49	63	14	4
60	54	7	9
8	10	59	53
13	3	50	64

Şekil 5 . 4. dereceden doğal sihirli kübün $z_{(1)}, z_{(2)}, z_{(3)}, z_{(4)}$ katlarındaki sayılar.

(1)

49	63	14	4
32	18	35	45
48	34	19	29
1	15	62	52

(2)

60	54	7	9
21	27	42	40
37	43	26	24
12	6	55	57

(3)

8	10	59	53
41	39	22	28
25	23	38	44
56	58	11	5

(4)

13	3	50	64
36	46	31	17
20	30	47	33
61	51	2	16

Şekil 6 . $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}$ katlarındaki sayılar.

(1)

13	8	60	49
36	41	21	32
20	25	37	48
61	58	12	1

(2)

3	10	54	63
46	39	27	18
30	23	43	34
51	58	6	15

(3)

50	59	7	14
31	22	42	35
47	38	26	19
2	11	65	62

(4)

64	53	9	4
17	26	40	45
38	44	24	29
16	5	57	52

Şekil 7 . $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}, y_{(4)}$ katlarındaki sayılar.

49	54	59	64
32	27	22	17
48	43	38	33
1	6	11	16

Q_{1z} kesiti

1	15	62	52
37	43	26	24
41	39	22	28
13	3	50	64

Q_{1y} kesiti

1	34	35	4
12	43	42	9
56	23	22	53
61	30	31	64

Q_{1x} kesiti

13	10	7	4
36	39	42	45
20	33	26	29
61	58	55	52

Q_{2z} kesiti

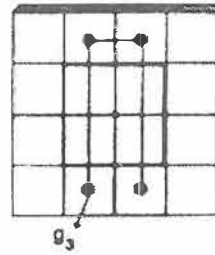
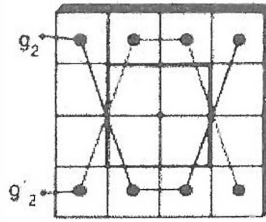
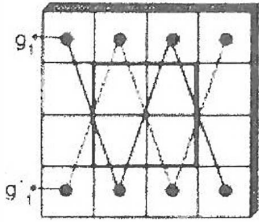
49	63	14	4
21	27	42	40
25	23	38	44
61	51	2	16

Q_{2y} kesiti

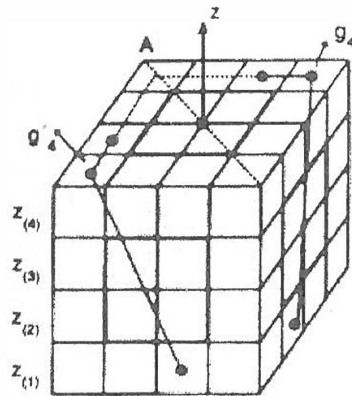
49	18	19	52
60	27	26	57
8	39	38	5
13	46	47	16

Q_{2x} kesiti

Şekil 8. Doğal sihirli kuben büyük kesitlerindeki sayılar.



Şekil 9. Graflar.



Şekil 10. Kubün $z_{(1)}$ ve $z_{(4)}$ katlarını kapsayan ve Q_{1z} büyük kesitine göre simetrik g_3 ve g_4 grafları.